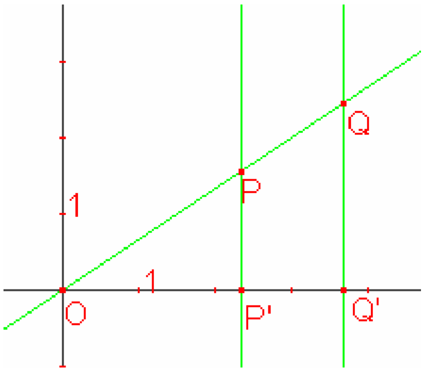
Dimostrazioni di geometria analitica

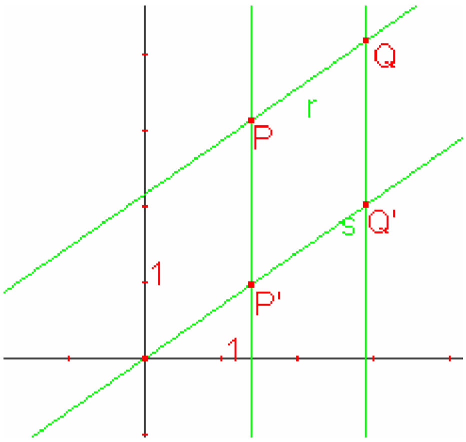
1. Come hai appreso dal libro di testo della classe seconda, una generica retta passante per l'origine ha equazione y=mx. Perché?

   Fissati gli assi cartesiani, ipotizziamo di tracciare una retta *r* passante per l'origine diversa dall'asse x . Scegliamo due punti qualsiasi su di essa P e Q; proiettiamoli ortogonalmente sull'asse x, ottenendo P' e Q'.
   I triangoli OPP' e OQQ' sono simili per il primo criterio di similitudine, avendo entrambi un angolo retto e l'angolo in O in comune; quindi i loro lati corrispondenti sono proporzionali; in particolare PP':OP'=QQ':OQ' ossia y(P):x(P) = y(Q):x(Q). Poiché i punti P e Q sono scelti "a caso", per qualsiasi punto della retta *r* il rapporto tra ordinata ed ascissa è costante. Tale costante viene solitamente indicata con *m* e viene detta coefficiente angolare della retta. Si ha cioè: y/x = m da cui y=mx

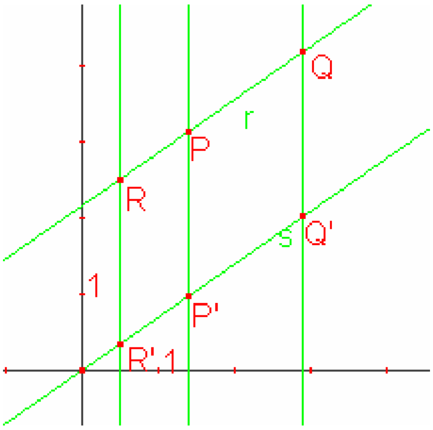


2. Una retta generica del piano ha equazione esplicita y=mx+q dove q è detta ordinata all'origine (è infatti l'ordinata del punto di intersezione tra la retta e l'asse y). Perché?

   Tracciamo una retta generica *r* (nel senso che non passa per l'origine e non è parallela né all'asse x né all'asse y). Per il quinto postulato di Euclide, per l'origine passa una ed una sola retta parallela ad *r*. Chiamiamola *s*. Per la dimostrazione 1., *s* avrà equazione del tipo y=mx.



   Scelto un qualsiasi punto P appartenente ad *r*, tracciamo la parallela all'asse y. Individuiamo su *s* il corrispondente punto P'; ripetiamo per un altro punto Q. La figura PP'Q'Q è un parallelogramma, per la costruzione fatta; avrà dunque i lati opposti PP' e QQ' congruenti.



La stessa cosa si può dire per RR' ecc. Se indichiamo con q la misura dei segmenti PP', QQ', RR'… osserviamo che l'ordinata di P è uguale all'ordinata di P' aumentata di q; ugualmente l'ordinata di Q è uguale all'ordinata di Q' aumentata di q…
Da questo deduciamo che per un punto generico la relazione tra la sua ordinata e la sua ascissa è $y=mx+q$

3. Assegnato un punto P del piano di coordinate (x_1,y_1), esistono infinite rette passanti per P, che costituiscono un fascio proprio. Una retta del fascio (esclusa quella parallela all'asse y, di equazione $x= x_1$), ha equazione del tipo $y- y_1= m(x- x_1)$. Perché?

Partendo dal fatto che una retta del fascio è anche retta del piano, la sua equazione sarà del tipo $y=mx+q$, in base alla dimostrazione 2. Se un punto appartiene ad una retta, le sue coordinate ne verificano l'equazione, dunque la condizione di passaggio per P sarà: $y_1=mx_1+q$. Se nelle due uguaglianze $y=mx+q$ e $y_1=mx_1+q$ sottraiamo membro a membro, otteniamo $y- y_1=(mx+q)-(mx_1+q) \rightarrow y- y_1=mx+q- mx_1+q \rightarrow y- y_1=m(x-x_1)$