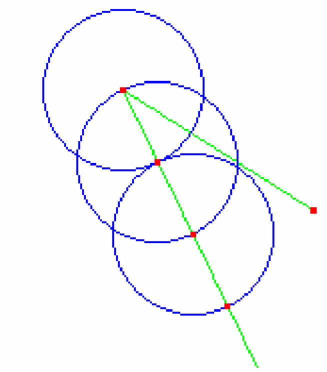
IL FIOCCO DI NEVE

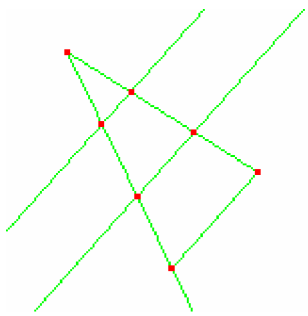
<u>Prerequisiti</u>

- Concetto di punto e retta
- Definizione di: segmento, semiretta, triangolo, circonferenza
- Proprietà del triangolo equilatero
- Triangoli simili e rapporto tra le loro aree
- Teorema di Talete

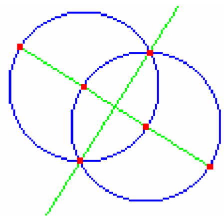
Se pensiamo di tracciare una circonferenza illimitata, il cerchio da essa racchiuso ha area illimitata. Con il software Cabri costruiamo una figura che paradossalmente ha perimetro illimitato e area tendente ad un valore finito.

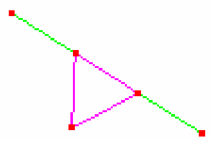
Dati due punti, tracciamo il segmento che li unisce. Suddividiamo poi il segmento in tre parti congruenti, mediante una applicazione del teorema di Talete, come segue:





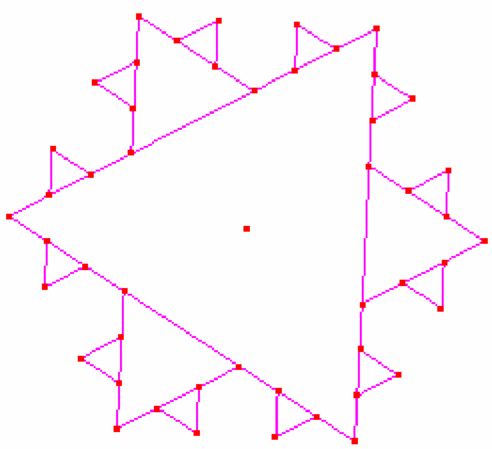
Costruiamo un triangolo equilatero sul segmento centrale:



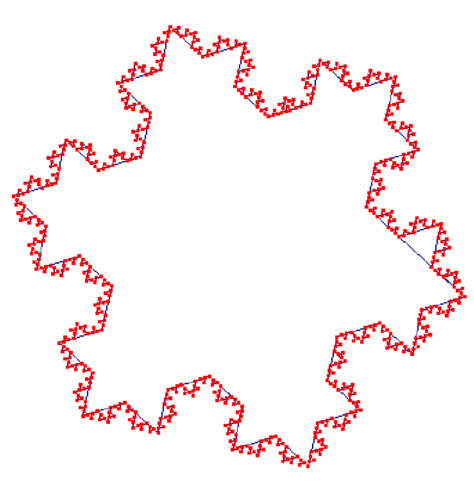


e definiamo la corrispondente macro.

Disegnato un triangolo equilatero, richiamiamo più volte la macro, in modo da ottenere questa costruzione:



Ripetiamo ancora il procedimento, fino ad ottenere una figura del tipo:



Indichiamo con S_1 l'area del triangolo equilatero iniziale e con S_2 la somma delle aree dei tre triangoli costruiti sui suoi lati. Si ha pertanto (per la similitudine): $S_2=\frac{1}{9}S_1+\frac{1}{9}S_1+\frac{1}{9}S_1=\frac{3}{9}S_1$

Al passo successivo abbiamo aggiunto su ogni lato 4 triangolini la cui area è $\frac{1}{9}\frac{1}{3}S_2$ per un totale di 12 triangolini. Se S_3 è la loro area complessiva, si ottiene $12\frac{1}{9}\frac{1}{3}S_2=\frac{4}{9}S_2$

L'area della figura che si sta costruendo è quindi:

$$S_1+\frac{3}{9}S_1+\frac{4}{9}S_2+\frac{4}{9}S_3\ldots$$

Ipotizziamo che S_1 sia uguale a 1 unità di misura. Otteniamo $1+\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\frac{1}{3}+\frac{4}{9}\frac{4}{9}\frac{1}{3}\ldots=$

$$1+\frac{1}{3}\left[1+\frac{4}{9}+\left(\frac{4}{9}\right)^2\ldots..\right]$$ Nella parentesi abbiamo la somma di n termini di una progressione geometrica di ragione $\frac{4}{9}$, quindi:

$$1+\frac{1}{3}\frac{\left(\frac{4}{9}\right)^n-1}{\frac{4}{9}-1}$$ Per n molto grande, "tendente ad infinito", $\left(\frac{4}{9}\right)^n$ tende a zero.

L'area del fiocco di neve è perciò:

$$1+\frac{1}{3}\frac{1}{\frac{5}{9}}=\frac{8}{5}$$