

LOGARITMI

Si definisce logaritmo in base a di b , quel numero c a cui elevare a per ottenere b . Si scrive:

$$\log_a b = c \text{ se e solo se } a^c = b$$

Con qualche esempio, “scopriamo” le condizioni a cui devono sottostare a , b e c .

$\log_2 (-4) = \dots$ $\log_2 0 = \dots$ Non esiste alcun numero a cui elevare 2 per ottenere un risultato negativo o nullo; dunque b , che è detto argomento del logaritmo, deve essere positivo.

$\log_1 4 = \dots$ Poiché $1^k = 1$ per ogni valore reale di k , la base a deve essere diversa da 1.

Poiché nell'ambito dei numeri reali non si definisce la potenza di un numero reale negativo con esponente reale, la base a deve anche essere positiva.

Vediamo altri esempi:

$$\log_2 32 = 5 \text{ perché } 2^5 = 32; \log_2 \left(\frac{1}{8}\right) = -3 \text{ perché } 2^{-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Ricordiamo che una potenza ad esponente negativo non avrebbe senso in base alla definizione di potenza, tuttavia viene stabilito che si calcoli elevando, ad esponente positivo, il reciproco della base.

La motivazione di questa scelta sta nella necessità di rendere coerente la teoria delle potenze.

Ricordiamolo con un esempio:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \text{ per la proprietà del quoziente di due potenze con egual base; sappiamo che}$$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \left(\frac{1}{9}\right) : \left(\frac{1}{81}\right) = 9; \text{ quindi, per la proprietà transitiva dell'uguaglianza, } \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = 9 = 3^2$$

Esercizi

1) Completa le seguenti uguaglianze:

a) $\log_2 1 = \dots$	$\log_3 \dots = 0$	$\log_2 16 = \dots$	$\log_2 \dots = -5$	$\log_{10} \dots = 5$
b) $\log_1 32 = \dots$	$\log_2 0 = \dots$	$\log_{1/2} \dots = 5$	$\log_{\dots} 81 = 4$	$\log_{10} 10 = \dots$
c) $\log_{10} 0,01 = \dots$	$\log_{10} \dots = -3$	$\log_{10} \dots = \frac{1}{3}$	$\log_{10} \dots = \frac{5}{7}$	
d) $\log_2 \dots = 8$	$\log_2 \dots = -6$	$\log_{\sqrt{3}} \dots = \frac{1}{3}$	$\log_{\frac{2}{5}} \dots = \frac{1}{9}$	
e) $\log_{\dots} \frac{1}{9} = 2$	$\log_{\dots} \frac{1}{9} = -2$	$\log_{\dots} \frac{1}{9} = \frac{1}{2}$	$\log_{\dots} \frac{1}{9} = -\frac{1}{2}$	
f) $\log_{\sqrt{3}} (3^4 \sqrt{3}) = \dots$	$\log_7 \sqrt[7]{7} = \dots$	$\log_{16} \frac{1}{2} = \dots$	$\log_{0,01} 10^{-4} = \dots$	

2) Stabilisci per quali valori di x sono definiti i seguenti logaritmi:

$\log(x^2 + 5)$	$\log(x^2 - x)$	$\log\left(x - \frac{5}{7}\right)$	$\log(x^2 + 5x - 6)$
-----------------	-----------------	------------------------------------	----------------------

Proprietà dei logaritmi

Nell'enunciato, ipotizziamo che la base c sia un qualsiasi numero reale positivo e diverso da 1, che a e b siano numeri reali positivi:

logaritmo del prodotto

$$\log_c (a \cdot b) = \log_c a + \log_c b$$

logaritmo del quoziente

$$\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

logaritmo di una potenza

$$\log_c a^n = n \log_c a$$

Queste proprietà derivano dalle proprietà delle potenze. Dimostriamo la prima:

Sia $\log_c a = k$, quindi $c^k = a$; sia $\log_c b = h$, quindi $c^h = b$

Il prodotto $a \cdot b = c^k \cdot c^h = c^{k+h}$

Per la definizione di logaritmo $\log_c (a \cdot b) = \log_c c^{k+h} = k+h = \log_c a + \log_c b$

Esercizi

1) Nei seguenti esercizi per comodità non indichiamo la base e supponiamo che l'argomento sia positivo; applica le proprietà dei logaritmi:

a) $\log (a+b)$

b) $\log (a^3 b)$

c) $\log (a+b) \frac{a}{b}$

d) $\log \frac{a^2 b}{c^4}$

d) $\log \sqrt[3]{(a+b)}$

e) $\log \sqrt{\sqrt[3]{(a+b)}}$

f) $\log \frac{\sqrt{a^2 b}}{c^4}$

g) $\log \frac{\sqrt{a^2 b}}{c^4} + b$

2) Riduci le seguenti espressioni ad un solo logaritmo:

a) $\log 5 - \log \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log 5$

b) $7 \log (a+b) - \log(a+b)$

c) $(\log \frac{1}{2} + \log \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{2}$

d) $\log 6 + 3 \log 6 - 7 \log 6$

e) $\log \sqrt{6 \sqrt{6 \sqrt{6}}}$