QUELLI CHE TRASCENDONO...SONO IRRAZIONALI

Livello scolare: triennio

Abilità interessate	Conoscenze	Nuclei coinvolti	Collegamenti esterni
Distinguere tra "dimostrare" e "verificare " Utilizzare in modo consapevole il software Derive Utilizzare il calcolo algebrico	Risoluzione di equazioni Rappresentazione di funzioni Regola degli zeri interi di un polinomio	Numeri e algoritmi Relazioni e funzioni Dimostrazioni e verifiche Laboratorio di matematica	Informatica

Contesto

Con la ricerca degli zeri di una funzione, dimostrare che alcuni numeri sono irrazionali e introdurre i numeri trascendenti.

Descrizione dell'attività

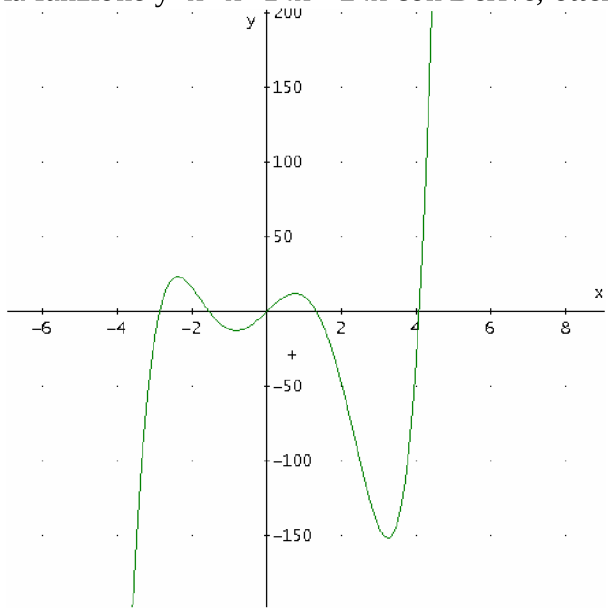
Prima fase

Si discute sulla differenza algebrica tra le due "scritture" $x^2 - 3x + 2 = 0$ e $x^2 - 3x + 2 = y$, oppure $x^2 - x + 2 = 0$ e $x^2 - x + 2 = y$..., che già gli allievi hanno incontrato più volte, a partire dalla seconda classe. Si richiama la differenza tra "una soluzione" e "una coppia soluzione"; in particolare come si determina una soluzione di $x^2 - 3x + 2 = 0$ e una soluzione di $x^2 - 3x + 2 = y$?

Sempre con il gruppo classe si richiamano le idee che gli allievi hanno riguardo ai numeri irrazionali. Solitamente pensano alla definizione di numero decimale illimitato non periodico.

Si rappresenta con Derive la parabola $x^2 - x + 2 = y$, osservando che non interseca l'asse x e richiamando la condizione ($\Delta > 0$, $\Delta = 0$, $\Delta < 0$) necessaria affinché l'equazione $ax^2+bx+c=0$ abbia due soluzioni reali distinte.

Si chiede di rappresentare la funzione $y=x^5-x^4-14x^3+24x$ con Derive, ottenendo:



di scrivere l'equazione x^5-x^4-14x^3+24x = 0 e di usare il comando Risolvi con metodo numerico, ottenendo x = -1.543477706   x = 1.330355179   x = 4.078736268   x = -2.865613741   x = 0 e poi con metodo algebrico, ottenendo:

SOLVE(0 = x - x - 14·x + 24·x, x, Real)

$$x = -\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{115-176\cdot\mathrm{COS}\left(\frac{2\cdot\mathrm{ACOT}\left(-\frac{9\cdot\sqrt{15243}}{5081}\right)}{3}\right)}}{12}-\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{115-176\cdot\mathrm{SIN}\left(\frac{2\cdot\mathrm{ATAN}\left(\frac{9\cdot\sqrt{15243}}{5081}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}}{12}+\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{176\cdot\mathrm{COS}\left(\frac{2\cdot\mathrm{ATAN}\left(\frac{9\cdot\sqrt{15243}}{5081}\right)}{3}\right)+115}}{12}+\frac{1}{4}\ \vee\ x = -$$

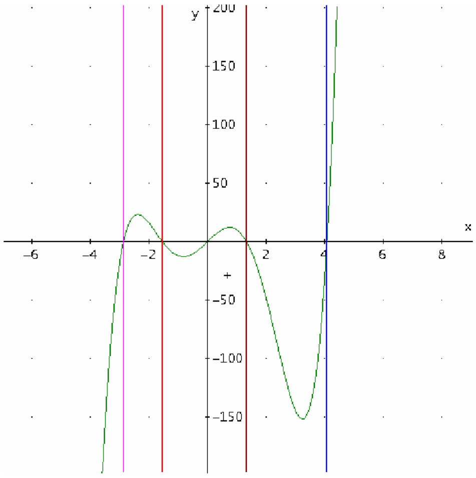
$$\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{115-176\cdot\mathrm{COS}\left(\frac{2\cdot\mathrm{ACOT}\left(-\frac{9\cdot\sqrt{15243}}{5081}\right)}{3}\right)}}{12}+\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{115-176\cdot\mathrm{SIN}\left(\frac{2\cdot\mathrm{ATAN}\left(\frac{9\cdot\sqrt{15243}}{5081}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}}{12}-\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{176\cdot\mathrm{COS}\left(\frac{2\cdot\mathrm{ATAN}\left(\frac{9\cdot\sqrt{15243}}{5081}\right)}{3}\right)+115}}{12}+\frac{1}{4}\ \vee\ x =$$

$$\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{115-176\cdot\mathrm{COS}\left(\frac{2\cdot\mathrm{ACOT}\left(-\frac{9\cdot\sqrt{15243}}{5081}\right)}{3}\right)}}{12}-\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{115-176\cdot\mathrm{SIN}\left(\frac{2\cdot\mathrm{ATAN}\left(\frac{9\cdot\sqrt{15243}}{5081}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}}{12}-\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{176\cdot\mathrm{COS}\left(\frac{2\cdot\mathrm{ATAN}\left(\frac{9\cdot\sqrt{15243}}{5081}\right)}{3}\right)+115}}{12}+\frac{1}{4}\ \vee\ x =$$

$$\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{115-176\cdot\mathrm{COS}\left(\frac{2\cdot\mathrm{ACOT}\left(-\frac{9\cdot\sqrt{15243}}{5081}\right)}{3}\right)}}{12}+\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{115-176\cdot\mathrm{SIN}\left(\frac{2\cdot\mathrm{ATAN}\left(\frac{9\cdot\sqrt{15243}}{5081}\right)}{3}+\frac{\pi}{6}\right)}}{12}+\frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{176\cdot\mathrm{COS}\left(\frac{2\cdot\mathrm{ATAN}\left(\frac{9\cdot\sqrt{15243}}{5081}\right)}{3}\right)+115}}{12}+\frac{1}{4}\ \vee\ x = 0$$

Si "sfrutta" lo stupore, il riconoscimento o meno delle funzioni ATAN, ACOT…per guidare la parte successiva della lezione.

Si chiede di rappresentare sul grafico della funzione il grafico ottenuto selezionando le soluzioni precedenti in entrambe le modalità



Riconosciuto che:

- Derive rappresenta le rette parallele all'asse y passanti per i punti di intersezione tra funzione ed asse x,
- i valori del metodo numerico coincidono dunque graficamente con quelli del metodo algebrico

si chiede se le soluzioni ottenute con metodo algebrico siano razionali o irrazionali.

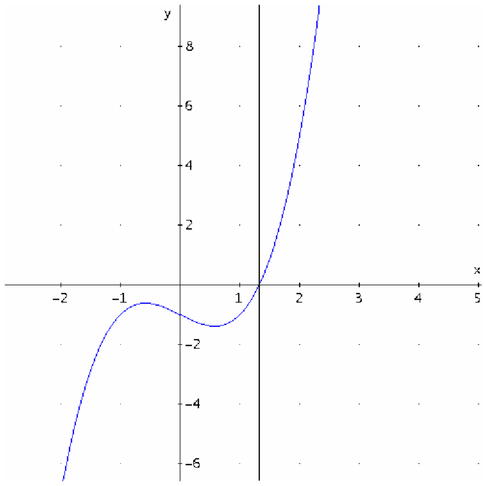
La risposta appare evidente, per la presenza di radici quadrate come $\sqrt{3}$ e $\sqrt{15243}$ ...(incontrate al biennio)
Si chiede che cosa siano allora x= -1.543477706 ecc. ; anche qui non è difficile per gli allievi capire che si tratta di "approssimazioni"…il computer non può rappresentare un numero decimale illimitato!
Si ripete il tutto con esempi più semplici es. y=x^2-64 oppure y=x^2-5
Si scrive, dopo averla commentata, la condizione perché x^n-a=0 ammetta soluzioni.

Si richiama, se nota, la definizione di numero razionale o “l’idea” di numero razionale come frazione, rapporto di interi $\frac{a}{b}$ con $b\neq 0$

Si chiede di individuare una funzione avente come zero $\frac{3}{5}$ … generalizzando poi con $\frac{a}{b}$ e quindi ax-b=0

<u>Seconda fase</u>

Si riparte con la funzione $y= x^3 - x - 1$ e si ripetono i due metodi risolutivi numerico e algebrico per $x^3 - x - 1 = 0$

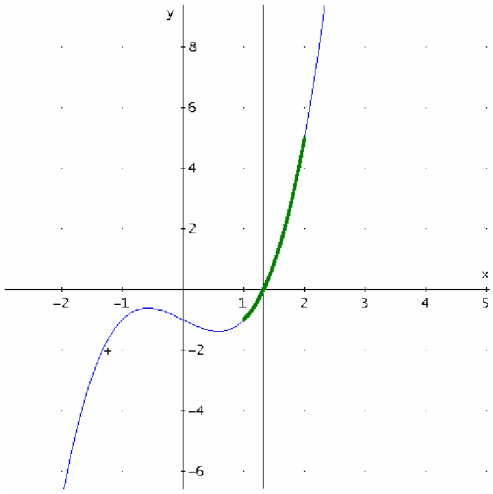


Si suggerisce poi di tabulare i valori prossimi allo zero della cubica, con l’istruzione: TABLE(x^3 –x-1,x,1,2,0.001) e Semplifica. Si ottiene una serie di coppie ordinate del tipo:

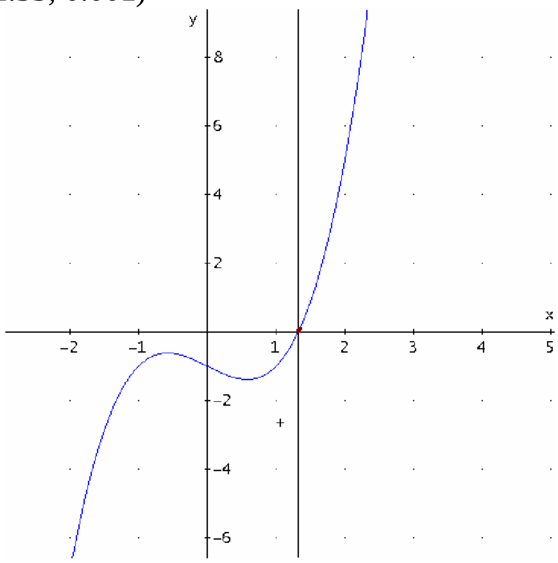
$$\mathrm{TABLE}(x^3 - x - 1,\ x,\ 1,\ 2,\ 0.001)$$

$$\left[[1, -1], \left[\frac{1001}{1000}, -\frac{997996999}{1000000000}\right], \left[\frac{501}{500}, -\frac{124498499}{125000000}\right], \left[\frac{1003}{1000}, -\frac{993972973}{1000000000}\right], \left[\frac{251}{250}, -\frac{15499249}{15625000}\right], \left[\frac{201}{200}, -\frac{7919399}{8000000}\right], \left[\frac{503}{500}, -\frac{123486473}{125000000}\right], \left[\frac{1007}{1000}, -\frac{985852657}{1000000000}\right], \left[\frac{126}{125}, -\frac{1921499}{1953125}\right], \left[\frac{1009}{1000}, -\frac{981756271}{1000000000}\right], \left[\frac{101}{100}, -\frac{979699}{1000000}\right], \left[\frac{1011}{1000}, -\frac{977635669}{1000000000}\right], \left[\frac{253}{250}, -\frac{15243223}{15625000}\right], \left[\frac{1013}{1000}, -\frac{973490803}{1000000000}\right],\right.$$

Si rappresentano i punti ottenuti



Si chiede poi di restringere l'intervallo fino ad avere (per tentativi) punti "quasi coincidenti" con lo zero della cubica.
Ad esempio
TABLE(x^3 - x - 1, x, 1.33, 1.35, 0.001)



Si deduce che un numero irrazionale può essere approssimato "abbastanza bene" con numeri razionali di un certo intervallo...

$$\begin{bmatrix} \frac{133}{100} & \frac{22637}{1000000} \\ \frac{1331}{1000} & \frac{26947691}{1000000000} \\ \frac{333}{250} & \frac{488537}{15625000} \\ \frac{1333}{1000} & \frac{35593037}{1000000000} \\ \frac{667}{500} & \frac{4990963}{125000000} \\ \frac{267}{200} & \frac{354163}{8000000} \\ \frac{167}{125} & \frac{94963}{1953125} \\ 1337 & 52979753 \end{bmatrix} \quad ....$$

Si fornisce la definizione di numero algebrico, ossia: Un numero si dice algebrico se è soluzione di un'equazione algebrica a coefficienti interi.
Ogni numero razionale è algebrico: scaturisce dall'attività fin qui svolta.

Si discute sulla proposizione "un numero non algebrico è allora non razionale, cioè irrazionale"; i numeri non algebrici si dicono trascendenti; allora ogni numero trascendente è irrazionale.
Queste asserzioni, se pur condivise sul piano logico, creano "subbuglio"...

<u>Terza fase</u>

Siamo sicuri che $\sqrt{3}$ sia irrazionale? E $\sqrt{2}+\sqrt{3}$?
I ragazzi non hanno mai visto una dimostrazione del fatto che un numero sia irrazionale…

Si richiama allora il teorema che abitualmente applicano per scomporre un polinomio con la regola di Ruffini:
"Sia una generica equazione polinomiale a coefficienti interi: $x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_0=0$; se essa ammette una radice razionale, tale radice è un numero intero. Inoltre questa radice intera è un divisore di c_0."
Costruiamo allora un'equazione polinomiale $x^n+c_{n-1}x^{n-1}+\ldots+c_0=0$ a coefficienti interi di cui $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ sia soluzione senza essere divisore del termine noto. Potremo dedurne che non è razionale!

Dimostrazione:

$\sqrt{2}+\sqrt{3}=x$ $\qquad$ $x-\sqrt{2}=\sqrt{3}$ $\qquad$ $(x-\sqrt{2})^2=3$ $\qquad$ $x^2+2-2\sqrt{2}\,x=3$

$x^2-1=2\sqrt{2}\,x$ $\qquad$ $(x^2-1)^2=8x$ $\qquad$ $x^4-10x^2+1=0$

Ritorniamo alla differenza tra algebrico e trascendente:
Un numero razionale è algebrico?
Un numero algebrico è razionale?
Un numero irrazionale è algebrico?
Un numero irrazionale è trascendente?
Un numero trascendente è irrazionale? Ecc. Si termina con qualche nota storica...

Prova di verifica

Costruire poche pagine web che trattino in modo personalizzato il tema delle lezioni precedenti.