CIRCONFERENZA

E' il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto fisso detto centro.
Ricaviamone l'equazione analitica. Siano assegnati il centro $C(\alpha, \beta)$ e la misura del raggio r.
Indichiamo un punto generico della circonferenza con P(x,y). Per la definizione precedente, la distanza PC deve essere uguale al raggio r per ogni punto P.
Perciò:
$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=r$ Sviluppando i calcoli ed ordinando:

$$x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$$

L'equazione cercata è dunque di secondo grado in x e y, priva del termine misto xy e con coefficienti di x^2 e y^2 uguali (riconducibili a 1).

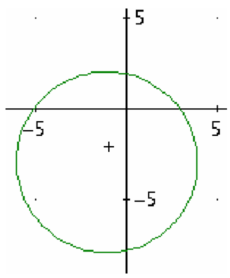
Esempio:
Se C(-3, 7) e r=8, si ha: $x^2+y^2+6x-14y-6 = 0$

Possiamo viceversa affermare che un'equazione del tipo $x^2+y^2+ax+by+c=0$ sia rappresentata nel piano cartesiano da una circonferenza?
Come possiamo determinarne centro e raggio?

Sia data l'equazione $x^2+y^2+2x+6y+10=0$. Se fosse l'equazione di una circonferenza, per confronto con quella generale $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$, avremmo
$-2\alpha=2$ cioè $\alpha=-1$; $-2\beta=6$ cioè $\beta=-3$ e infine $+\alpha^2+\beta^2-r^2= 10$, quindi $1+9-r^2=10$ da cui r=0
Si tratta di una circonferenza degenere, ossia ridotta ad un solo punto C(-1,-3)

Sia data l'equazione $x^2+y^2+2x+6y+15=0$. Se fosse l'equazione di una circonferenza, per confronto con quella generale $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$, avremmo
$-2\alpha=2$ cioè $\alpha=-1$; $-2\beta=6$ cioè $\beta=-3$ e infine $+\alpha^2+\beta^2-r^2= 15$, quindi $1+9-r^2=15$ da cui $r^2=-5$.
Non è una circonferenza a punti reali perché tale equazione non ammette soluzioni in R.

Sia data l'equazione $x^2+y^2+2x+6y-15=0$. Se fosse l'equazione di una circonferenza, per confronto con quella generale $x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y+\alpha^2+\beta^2-r^2=0$, avremmo
$-2\alpha=2$ cioè $\alpha=-1$; $-2\beta=6$ cioè $\beta=-3$ e infine $+\alpha^2+\beta^2-r^2= 10$, quindi $1+9-r^2=-15$ da cui r=5
con grafico



Problema

Determiniamo l'equazione delle rette tangenti alla circonferenza $x^2+y^2+2x+6y-15=0$ passanti per il punto (6, 4).

La retta generica del fascio ha equazione: $y - 4 = m\cdot(x - 6)$. Sfruttiamo la proprietà per cui una tangente è perpendicolare al raggio nel punto di tangenza, ossia che la distanza del centro da tale retta sia uguale al raggio

$$\frac{|y - 4 - m\cdot(x - 6)|}{\sqrt{(m^2+1)}} = 5 \text{ con } \quad (x,y) = (-1,-3)$$

$$\frac{|-3 - 4 - m\cdot(-1 - 6)|}{\sqrt{(m^2+1)}} = 5$$

Risolviamo, trovando m

$$m = \frac{49}{24} - \frac{5\cdot\sqrt{73}}{24} \text{ (circa 0,26)} \qquad \text{oppure } m = \frac{5\cdot\sqrt{73}}{24} + \frac{49}{24} \text{ (circa 3,82)}$$

Sostituiamo nell'equazione del fascio e rappresentiamo